| 受験番号 | 数学教育領域 |
|---|---|

令和７年度
筑波大学大学院　教育学学位プログラム　博士前期課程
次世代学校教育創成サブプログラム入学試験問題（10月実施）

# 専門科目

（１３：００～１５：００）

**解答要領**

次の事項に注意して解答しなさい。

１．「解答はじめ」の合図があるまでは解答を始めてはいけません。

２．「解答やめ」の合図があれば直ちに筆記用具を置いてください。合図の後も筆記用具を持っている場合には不正行為と見なします。

３．専門科目の問題には、「教科教育に関する問題」が３題と「教科専門に関する問題」が２題あります。すべての問題に解答してください。解答用紙は問題ごとに１枚ずつ使用し、それぞれに問題番号を明記してください。

４．「教科教育に関する問題」で解答の字数が指定されている場合、ます目のある解答用紙を使用してください。

５．「教科専門に関する問題」の解答用紙を裏面まで使用する場合、表面にその旨を明記してください。

６．解答要領、問題用紙、解答用紙、および下書き用紙をすべて提出してください。解答要領、問題用紙、および解答用紙のホチキス止めは外さないでください。

７．日本語で解答してください。

【 令和７年度筑波大学大学院教育学学位プログラム博士前期課程
次世代学校教育創成サブプログラム入学試験問題 】

数学教育領域

専門科目（教科教育に関する問題）　　　　　　　　　　　　　　３枚のうち１枚目

問１．数学的モデル化の学習指導においては，現実世界の事象を数学の舞台にのせる過程が重要である．その過程で用いられる考え方を，数学的モデル化の具体例を挙げて説明しなさい．（400 字以内）

問２．次の用語から１つを選択し，その意味を説明しなさい．　（200 字以内）

a. 一般化

b. 大数の法則

c. 数え主義

【 令和７年度筑波大学大学院教育学学位プログラム博士前期課程
次世代学校教育創成サブプログラム入学試験問題 】

数学教育領域

専門科目（教科教育に関する問題）　　３枚のうち２枚目

問３．次の英文を日本語に全訳しなさい．

（著作権法に基づき削除）

註

demonstrative geometry：論証幾何

出典

Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof* (*1938 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*). Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University. p. 1.

【 令和 7 年度筑波大学大学院教育学学位プログラム博士前期課程
次世代学校教育創成サブプログラム入学試験問題 】

数学教育領域

専門科目（教科専門に関する問題）



**(I)** 実 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

と $A$ が与える 3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の上の線形変換

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

について以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

(2) $f$ の像 $\operatorname{Im} f = \{\, f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) $f$ の核 $\operatorname{Ker} f = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \,\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(4) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{\, \mathbf{0} \,\}$ が成り立つことを示せ.

**(II)** 以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta}\, d\theta$ を求めよ.

(2) $f(x)$ が $[0,1]$ で連続であるとき，次を示せ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin\theta)\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)\, d\theta.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \theta f(\sin\theta)\, d\theta = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)\, d\theta.$

(3) (2) の (b) を用いて $\displaystyle\int_0^{\pi} \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin\theta)^{2k-1}}{2^k}\, d\theta$ を求めよ.

# 令和7年度入学試験（10月実施）
# 専門科目（数学教育領域）　解答例

(**I**)

(1) $A$ を行基本変形で階段行列にすると $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。　よって rank $A$=2.

(2) (1) の結果より、Im $f$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる。

(3) 次元定理より dim Ker $f = 3 - 2 = 1$. (1) の結果より Ker $f$ の元 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は $x - y - z = 0,\ z = 0$ を満たす。よって Ker $f$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる。

(4) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の階数を求めると 3 である。よってこの 3 つのベクトルは 1 次独立であり、$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\, f \bigoplus \mathrm{Ker}\, f$ なので $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$.

(**II**)

(1) $\cos\theta = t$ とおくと

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta} d\theta \\ =&\int_1^0 \frac{-dt}{1+t^2} \\ =&\left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(2)　(a)

$$\int_0^{\pi} f(\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin\theta)d\theta.$$

$t = \pi - \theta$ とおくと

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt.$$

(b)

$$\int_0^{\pi} \theta f(\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta f(\sin\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta f(\sin\theta)d\theta.$$

$t = \pi - \theta$ とおくと

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta f(\sin\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi - t) f(\sin t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(\sin t)dt.$$

(3) (2) (b) より

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin\theta)^{2k-1}}{2^k} d\theta \\
=&\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin\theta)^{2k-1}}{2^k} d\theta \\
=&\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin^2\theta)^{k-1}}{2^{k-1}} d\theta \\
=&\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{2} \frac{1}{1-\frac{\sin^2\theta}{2}} d\theta \\
=&\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{2-\sin^2\theta} d\theta \\
=&\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta} d\theta \\
=&\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$